**Симплекс-метод**.

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 2x1+2x2+2x3+2x4+2x5+2 при следующих условиях-ограничений.

3x1+5x2-2x3+x4+4x5≤12

x1+x2+2x3+5x5≤6

-x1+3x2+3x3+4x4+2x5≤7

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных

3x1+5x2-2x3+x4+4x5+x6 = 12

x1+x2+2x3+5x5+x7 = 6

-x1+3x2+3x3+4x4+2x5+x8 = 7

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 5 | -2 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| -1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 |

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (0,0,0,0,0,12,6,7)

**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x6 | 12 | 3 | 5 | -2 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| x7 | 6 | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 |
| x8 | 7 | -1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

**Итерация №0**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x5, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai5

и из них выберем наименьшее:

min (12 : 4 , 6 : 5 , 7 : 2 ) = 6/5

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (5) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x6 | 12 | 3 | 5 | -2 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| x7 | 6 | 1 | 1 | 2 | 0 | 5 | 0 | 1 | 0 | 6/5 |
| x8 | 7 | -1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 7/2 |
| F(X1) | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 0 | 0 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x7 в план 1 войдет переменная x5.

Строка, соответствующая переменной x5 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x7 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=5. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x5 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x5 и столбец x5. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А∙В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (5), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 12-(6∙4):5 | 3-(1∙4):5 | 5-(1∙4):5 | -2-(2∙4):5 | 1-(0∙4):5 | 4-(5∙4):5 | 1-(0∙4):5 | 0-(1∙4):5 | 0-(0∙4):5 |
| 6 : 5 | 1 : 5 | 1 : 5 | 2 : 5 | 0 : 5 | 5 : 5 | 0 : 5 | 1 : 5 | 0 : 5 |
| 7-(6∙2):5 | -1-(1∙2):5 | 3-(1∙2):5 | 3-(2∙2):5 | 4-(0∙2):5 | 2-(5∙2):5 | 0-(0∙2):5 | 0-(1∙2):5 | 1-(0∙2):5 |
| 0-(6∙-2):5 | -2-(1∙-2):5 | -2-(1∙-2):5 | -2-(2∙-2):5 | -2-(0∙-2):5 | -2-(5∙-2):5 | 0-(0∙-2):5 | 0-(1∙-2):5 | 0-(0∙-2):5 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x6 | 36/5 | 11/5 | 21/5 | -18/5 | 1 | 0 | 1 | -4/5 | 0 |
| x5 | 6/5 | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 0 | 1 | 0 | 1/5 | 0 |
| x8 | 23/5 | -7/5 | 13/5 | 11/5 | 4 | 0 | 0 | -2/5 | 1 |
| F(X1) | 12/5 | -8/5 | -8/5 | -6/5 | -2 | 0 | 0 | 2/5 | 0 |

**Итерация №1**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai4

и из них выберем наименьшее:

min (36/5 : 1 , - , 23/5 : 4 ) = 23/20

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (4) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x6 | 36/5 | 11/5 | 21/5 | -18/5 | 1 | 0 | 1 | -4/5 | 0 | 36/5 |
| x5 | 6/5 | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 0 | 1 | 0 | 1/5 | 0 | - |
| x8 | 23/5 | -7/5 | 13/5 | 11/5 | 4 | 0 | 0 | -2/5 | 1 | 23/20 |
| F(X2) | 12/5 | -8/5 | -8/5 | -6/5 | -2 | 0 | 0 | 2/5 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x8 в план 2 войдет переменная x4.

Строка, соответствующая переменной x4 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x8 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=4. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x4 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x4 и столбец x4. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 36/5-(23/5∙1):4 | 11/5-(-7/5∙1):4 | 21/5-(13/5∙1):4 | -18/5-(11/5∙1):4 | 1-(4∙1):4 | 0-(0∙1):4 | 1-(0∙1):4 | -4/5-(-2/5∙1):4 | 0-(1∙1):4 |
| 6/5-(23/5∙0):4 | 1/5-(-7/5∙0):4 | 1/5-(13/5∙0):4 | 2/5-(11/5∙0):4 | 0-(4∙0):4 | 1-(0∙0):4 | 0-(0∙0):4 | 1/5-(-2/5∙0):4 | 0-(1∙0):4 |
| 23/5 : 4 | -7/5 : 4 | 13/5 : 4 | 11/5 : 4 | 4 : 4 | 0 : 4 | 0 : 4 | -2/5 : 4 | 1 : 4 |
| 12/5-(23/5∙-2):4 | -8/5-(-7/5∙-2):4 | -8/5-(13/5∙-2):4 | -6/5-(11/5∙-2):4 | -2-(4∙-2):4 | 0-(0∙-2):4 | 0-(0∙-2):4 | 2/5-(-2/5∙-2):4 | 0-(1∙-2):4 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x6 | 121/20 | 51/20 | 71/20 | -83/20 | 0 | 0 | 1 | -7/10 | -1/4 |
| x5 | 6/5 | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 0 | 1 | 0 | 1/5 | 0 |
| x4 | 23/20 | -7/20 | 13/20 | 11/20 | 1 | 0 | 0 | -1/10 | 1/4 |
| F(X2) | 47/10 | -23/10 | -3/10 | -1/10 | 0 | 0 | 0 | 1/5 | 1/2 |

**Итерация №2**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1

и из них выберем наименьшее:

min (121/20 : 51/20 , 6/5 : 1/5 , - ) = 121/51

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (51/20) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x6 | 121/20 | 51/20 | 71/20 | -83/20 | 0 | 0 | 1 | -7/10 | -1/4 | 121/51 |
| x5 | 6/5 | 1/5 | 1/5 | 2/5 | 0 | 1 | 0 | 1/5 | 0 | 6 |
| x4 | 23/20 | -7/20 | 13/20 | 11/20 | 1 | 0 | 0 | -1/10 | 1/4 | - |
| F(X3) | 47/10 | -23/10 | -3/10 | -1/10 | 0 | 0 | 0 | 1/5 | 1/2 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x6 в план 3 войдет переменная x1.

Строка, соответствующая переменной x1 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x6 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=51/20. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x1 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x1 и столбец x1. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 121/20 : 51/20 | 51/20 : 51/20 | 71/20 : 51/20 | -83/20 : 51/20 | 0 : 51/20 | 0 : 51/20 | 1 : 51/20 | -7/10 : 51/20 | -1/4 : 51/20 |
| 6/5-(121/20∙1/5):51/20 | 1/5-(51/20∙1/5):51/20 | 1/5-(71/20∙1/5):51/20 | 2/5-(-83/20∙1/5):51/20 | 0-(0∙1/5):51/20 | 1-(0∙1/5):51/20 | 0-(1∙1/5):51/20 | 1/5-(-7/10∙1/5):51/20 | 0-(-1/4∙1/5):51/20 |
| 23/20-(121/20∙-7/20):51/20 | -7/20-(51/20∙-7/20):51/20 | 13/20-(71/20∙-7/20):51/20 | 11/20-(-83/20∙-7/20):51/20 | 1-(0∙-7/20):51/20 | 0-(0∙-7/20):51/20 | 0-(1∙-7/20):51/20 | -1/10-(-7/10∙-7/20):51/20 | 1/4-(-1/4∙-7/20):51/20 |
| 47/10-(121/20∙-23/10):51/20 | -23/10-(51/20∙-23/10):51/20 | -3/10-(71/20∙-23/10):51/20 | -1/10-(-83/20∙-23/10):51/20 | 0-(0∙-23/10):51/20 | 0-(0∙-23/10):51/20 | 0-(1∙-23/10):51/20 | 1/5-(-7/10∙-23/10):51/20 | 1/2-(-1/4∙-23/10):51/20 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x1 | 121/51 | 1 | 71/51 | -83/51 | 0 | 0 | 20/51 | -14/51 | -5/51 |
| x5 | 37/51 | 0 | -4/51 | 37/51 | 0 | 1 | -4/51 | 13/51 | 1/51 |
| x4 | 101/51 | 0 | 58/51 | -1/51 | 1 | 0 | 7/51 | -10/51 | 11/51 |
| F(X3) | 518/51 | 0 | 148/51 | -196/51 | 0 | 0 | 46/51 | -22/51 | 14/51 |

**Итерация №3**.

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

**2. Определение новой базисной переменной**.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x3, так как это наибольший коэффициент по модулю.

**3. Определение новой свободной переменной**.

Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai3

и из них выберем наименьшее:

min (- , 37/51 : 37/51 , - ) = 1

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (37/51) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | min |
| x1 | 121/51 | 1 | 71/51 | -83/51 | 0 | 0 | 20/51 | -14/51 | -5/51 | - |
| x5 | 37/51 | 0 | -4/51 | 37/51 | 0 | 1 | -4/51 | 13/51 | 1/51 | 1 |
| x4 | 101/51 | 0 | 58/51 | -1/51 | 1 | 0 | 7/51 | -10/51 | 11/51 | - |
| F(X4) | 518/51 | 0 | 148/51 | -196/51 | 0 | 0 | 46/51 | -22/51 | 14/51 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x5 в план 4 войдет переменная x3.

Строка, соответствующая переменной x3 в плане 4, получена в результате деления всех элементов строки x5 плана 3 на разрешающий элемент РЭ=37/51. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x3 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 4 заполнены строка x3 и столбец x3. Все остальные элементы нового плана 4, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| 121/51-(37/51∙-83/51):37/51 | 1-(0∙-83/51):37/51 | 71/51-(-4/51∙-83/51):37/51 | -83/51-(37/51∙-83/51):37/51 | 0-(0∙-83/51):37/51 | 0-(1∙-83/51):37/51 | 20/51-(-4/51∙-83/51):37/51 | -14/51-(13/51∙-83/51):37/51 | -5/51-(1/51∙-83/51):37/51 |
| 37/51 : 37/51 | 0 : 37/51 | -4/51 : 37/51 | 37/51 : 37/51 | 0 : 37/51 | 1 : 37/51 | -4/51 : 37/51 | 13/51 : 37/51 | 1/51 : 37/51 |
| 101/51-(37/51∙-1/51):37/51 | 0-(0∙-1/51):37/51 | 58/51-(-4/51∙-1/51):37/51 | -1/51-(37/51∙-1/51):37/51 | 1-(0∙-1/51):37/51 | 0-(1∙-1/51):37/51 | 7/51-(-4/51∙-1/51):37/51 | -10/51-(13/51∙-1/51):37/51 | 11/51-(1/51∙-1/51):37/51 |
| 518/51-(37/51∙-196/51):37/51 | 0-(0∙-196/51):37/51 | 148/51-(-4/51∙-196/51):37/51 | -196/51-(37/51∙-196/51):37/51 | 0-(0∙-196/51):37/51 | 0-(1∙-196/51):37/51 | 46/51-(-4/51∙-196/51):37/51 | -22/51-(13/51∙-196/51):37/51 | 14/51-(1/51∙-196/51):37/51 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x1 | 4 | 1 | 45/37 | 0 | 0 | 83/37 | 8/37 | 11/37 | -2/37 |
| x3 | 1 | 0 | -4/37 | 1 | 0 | 51/37 | -4/37 | 13/37 | 1/37 |
| x4 | 2 | 0 | 42/37 | 0 | 1 | 1/37 | 5/37 | -7/37 | 8/37 |
| F(X4) | 14 | 0 | 92/37 | 0 | 0 | 196/37 | 18/37 | 34/37 | 14/37 |

**1. Проверка критерия оптимальности**.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
| x1 | 4 | 1 | 45/37 | 0 | 0 | 83/37 | 8/37 | 11/37 | -2/37 |
| x3 | 1 | 0 | -4/37 | 1 | 0 | 51/37 | -4/37 | 13/37 | 1/37 |
| x4 | 2 | 0 | 42/37 | 0 | 1 | 1/37 | 5/37 | -7/37 | 8/37 |
| F(X5) | 14 | 0 | 92/37 | 0 | 0 | 196/37 | 18/37 | 34/37 | 14/37 |

Оптимальный план можно записать так:

x1 = 4, x2 = 0, x3 = 1, x4 = 2, x5 = 0

F(X) = 2∙4 + 2∙0 + 2∙1 + 2∙2 + 2∙0 + 2 = 16